

## Компьютерное моделирование процесса теплопроводности в металлической фольге

Ирина Михайловна Слабженникова

Дальневосточный государственный технический рыбохозяйственный университет  
690087 Россия, Владивосток, ул. Луговая, 52б; e-mail: ims2710@gmail.com

В работе описан пример компьютерного моделирования процесса теплопроводности через слой металлической фольги. Разработана математическая модель физического процесса, описан алгоритм программы, представлен текст программы с комментариями. Программа реализована в системе компьютерной алгебры Maxima, которая подходит студентам младших курсов благодаря своей простоте, универсальности и доступности. В данной статье представлены некоторые результаты вычислительного эксперимента.  
*Ключевые слова:* компьютерное моделирование, математическая модель, теплопроводность, металлическая фольга.

**DOI:** 10.54965/16093143\_2025\_31\_4\_118

### Введение

Компьютерное моделирование играет важную роль в современном образовании и научных исследованиях, так как позволяет представлять сложные физические процессы в доступной и понятной форме.

Перечислим некоторые основные преимущества компьютерных технологий, которые расширили границы применения моделирования:

- возможность наглядной визуализации сложных процессов;
- управление параметрами виртуального эксперимента в реальном времени;
- исследование явлений, недоступных для натурального эксперимента;
- построение графических зависимостей в процессе исследования;
- масштабирование временных процессов.

Авторы работы [1] отмечают «необходимость использования математического моделирования при решении учебных и научно-исследовательских задач как одного из важнейших методов, непосредственно влияющего на повышение качества не только фундаментальной, но и профессиональной подготовки студентов».

Кроме того, как показано в работах [1, 2], моделирование является основой для интеграции различных учебных дисциплин: физики, математики и информатики.

В Дальневосточном государственном техническом рыбохозяйственном университете (Дальрыбвтузе) на кафедре «Электроэнергетика и автоматика» большое внимание уделяется компьютерному моделированию физических явлений и внедрению разрабо-

таных программ в учебный процесс [3], учебно- и научно-исследовательскую работу студентов и курсантов [4–6].

В работах [3, 5] приведены примеры компьютерного моделирования процесса теплопроводности через плоскую стенку. Разработанные программы позволили исследовать процесс передачи теплоты через основные строительные материалы (дерево, бетон, кирпич), а также выполнить сравнительный анализ свойств теплоизоляционных материалов. Данная научная работа была выполнена в рамках исследовательского проекта по изучению механизмов энергосбережения в наружных конструкциях зданий.

Настоящая публикация представляет собой логическое продолжение проведённых исследований.

## Компьютерное моделирование явления теплопроводности

### Математическая модель

В современном строительстве особое внимание уделяется комплексному подходу к решению проблем энергоэффективности и совершенствованию технологий поддержания комфортного микроклимата в помещениях. Автор работы [7] отмечает, что «одним из перспективных направлений энергосбережения является отражающая теплоизоляция», которая состоит из полимера покрытого слоем металлической фольги. Фольгированный утеплитель останавливает теплоту на всех трех путях распространения: теплопроводность, конвекция и тепловое излучение. Относительный вклад каждого из путей теплопередачи зависит от многих параметров, что значительно усложняет математическое описание явления. Чтобы упростить решение поставленной задачи, в данном исследовании рассматривается только один механизм распространения теплоты – теплопроводность в слое металлической фольги.

Дифференциальное уравнение теплопроводности Фурье однородного изотропного тела в декартовой системе координат имеет вид:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = K \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + q_v(x, y, z, t). \quad (1)$$

Каждое слагаемое в этом уравнении относится к физической величине, которая называется мощностью источника единичного объёма. Чтобы решить уравнение (1) для фольги, следует разделить фольгу сеткой и для каждого узла сетки записать уравнение (1). Каждый узел сетки находится в центре элементарной ячейки, размеры которой определяются расстояниями между соседними узлами вдоль осей координат. Ячейка называется элементарной, если температуры во всех точках ячейки равны. Если предположить, что температура любой точки первой поверхности равна температуре противоположной точки второй поверхности в любой момент времени, то температура будет зависеть только от двух координат, например,  $x$  и  $y$ . В этом случае, каждый узел можно обозначить двумя

индексами  $(i, j)$ . Индексы  $(i, j)$  определяют положение узла относительно координат  $x$  и  $y$ . Индекс  $i$  – относится к координате  $x$ , а индекс  $j$  – к координате  $y$ . Из отсутствия зависимости температуры от координаты  $z$  следует, что

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0.$$

Пример разделения фольги сеткой представлен на рис. 1.

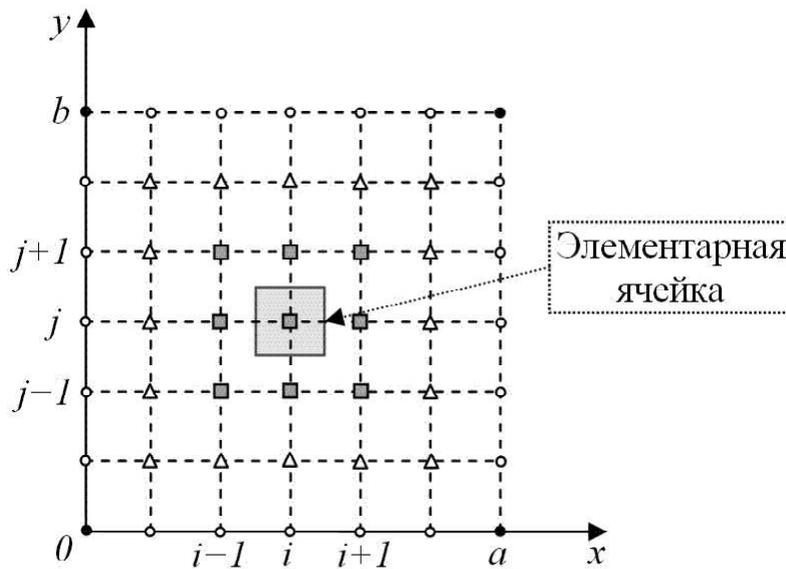


Рисунок 1. Пример разделения фольги математической сеткой.

Один из углов фольги находится в начале системы координат. Узлы, обозначенные значком  $\bullet$ , не используются в процессе вычисления. В узлах, обозначенных значком  $\circ$ , температура приравнивается температуре в узлах, обозначенных значком  $\Delta$ . Данное упрощение вносит ошибку в вычисление температуры на краях фольги. Температура вычисляется в узлах, обозначенных значками  $\Delta$  и  $\blacksquare$ . Объем элементарной ячейки вычисляется по формуле:  $v = \Delta x \Delta y d$ , где  $\Delta x$  – расстояние между соседними узлами вдоль оси  $x$ ,  $\Delta y$  – расстояние между соседними узлами вдоль оси  $y$ ,  $d$  – толщина фольги. Если  $N_i$  – количество узлов вдоль оси  $x$ , то  $\Delta x = a/(N_i - 1)$ , где  $a$  – длина фольги. Если  $N_j$  – количество узлов вдоль оси  $y$ , то  $\Delta y = b/(N_j - 1)$ , где  $b$  – ширина фольги.

Уравнение (1) для элементарной ячейки  $(i, j)$  в конечных разностях имеет вид:

$$c\rho \frac{(T_{ij}^{m+1} - T_{ij}^m)}{\Delta t} = K \left[ \frac{1}{\Delta x^2} (T_{i+1,j}^m - 2T_{ij}^m + T_{i-1,j}^m) + \frac{1}{\Delta y^2} (T_{i,j+1}^m - 2T_{ij}^m + T_{i,j-1}^m) + \frac{q_{vij}}{v} \right], \quad (2)$$

где  $i = 1, 2, 3, \dots, Ni$ ;  $j = 1, 2, 3, \dots, Nj$ ;  $m = 0, 1, 2, 3, \dots$  – номер точки на оси времени;  $\Delta t$  – длина изменения времени;  $q_{vij}$  – мощность объема  $v$  теплового источника, находящегося в ячейке  $(i, j)$ . Из уравнения (2) следует итерационное уравнение вычисления распределения температуры на поверхности плоской фольги:

$$T_{ij}^{m+1} = \frac{\Delta t}{c\rho} \left\{ K \left[ \frac{1}{\Delta x^2} (T_{i+1,j}^m - 2T_{ij}^m + T_{i-1,j}^m) + \frac{1}{\Delta y^2} (T_{i,j+1}^m - 2T_{ij}^m + T_{i,j-1}^m) \right] + \frac{q_{vij}}{v} \right\} + T_{ij}^m. \quad (3)$$

Вторые производные вычислялись по формуле:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \approx \frac{\{f(x + \Delta x) - f(x)\}/\Delta x - \{f(x) - f(x - \Delta x)\}/\Delta x}{\Delta x} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \approx \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta x^2},$$

где  $i+1$  соответствует  $x + \Delta x$ ,  $i$  соответствует  $x$ ,  $i-1$  соответствует  $x - \Delta x$ .

Значения  $T_{ij}^m$  хранятся в одномерном массиве, индекс которого определяется формулой:

$$k = Ni(i-1) + j + NiNjm.$$

#### Алгоритм программы

Для реализации разработанной математической модели на компьютере необходимо выполнить следующие действия:

- 1) объявляются: количество узлов вдоль оси  $x$ , количество узлов вдоль оси  $y$ , количество делений оси времени, время моделирования в секундах, начальная температура в  $^{\circ}\text{C}$ , преобразование из  $^{\circ}\text{C}$  в  $\text{K}$ , название вещества, коэффициент теплопроводности, удельная теплоёмкость, плотность, длина фольги, ширина фольги, толщина фольги;
- 2) вычисляются: длина шага изменения времени, размеры ячейки, объём ячейки;
- 3) объявляются: координаты источника и его мощность, координаты  $x, y$  пробной точки, координаты  $i, j$  источника, массив значений температуры в узлах сетки в зависимости от времени, массив значений относительной температуры в узле в зависимости от времени, массив значений текущего времени;
- 4) объявление функции вычисления индекса трёхмерного массива;
- 5) цикл решения уравнения Фурье;
- 6) вычисление координат  $i, j$  пробной точки и заполнение массива относительной температуры в пробной точке в зависимости от времени;
- 7) вывод на экран информации о пробной точке;
- 8) объявление функции, которая извлекает значения температуры из одномерного массива;
- 9) построение графиков распределения температуры.

```

Ni:10$ /*количество узлов вдоль оси x*/
Nj:10$ /*количество узлов вдоль оси y*/
Nm:10$ /*количество делений оси времени*/
tm:0.001$ /*время моделирования в секундах*/
dt:(tm/Nm)$ /*длина шага изменения времени*/
T0:20$ /*начальная температура в °C*/
T0-T0+273$ /*преобразование из °C в K*/
Str:"Sn"$ /*название вещества*/
K:67$ /*коэффициент теплопроводности*/
C:218$ /*удельная теплоёмкость*/
R:7280$ /*плотность*/
CR:C*R$
a:0.03$ /*длина фольги*/
b:0.03$ /*ширина фольги*/
d:0.2e-3$ /*толщина фольги*/
dx:(Ni-1)$ dy:(Nj-1)$ /*размер ячеек*/
v:dx*dy*d$ /*объём ячейки*/
dxx:dx*dx$ dy:dy*dy$
Xq:a/2$ Yq:b/2$ P:100$ /*координаты источника и его мощность*/
P:P/v$
Xp:a/2$ Yp:b/2$ /*координаты x, y пробной точки*/
I:floor(Xq/dx)+1$ J:floor(Yq/dy)+1$ /*координаты i, j источника*/
NiNj:Ni*Nj$ N:NiNj*(Nm+1)$
T:makelist(T0,i,1,N)$ /*температура в узлах сетки в зависимости от времени*/
Tij:makelist(T0,i,1,Nm+1)$ /*относительная температура в узле в зависимости от времени*/
t:makelist(0,i,1,Nm+1)$ /*значения текущего времени*/
k(i,1,m1):=block(return(Nj*(i-1)+j+1+NiNj*m1))$ /*вычисление индекса массива*/
for m:0 thru Nm-1 do /*цикл решения уравнения Фурье*/
(for i:2 thru Ni-1 do
  (for j:2 thru Nj-1 do
    (if((i-1) and (j-1)) then qI:P /*добавление источника*/
      else qI:0, Tijm:T[k(i,j,m)], Tijm2:2*Tijm,
      T[k(i,j,m+1)].float(dt*(K*(
        T[k(i+1,j,m)]-Tijm2+T[k(i-1,j,m)])/dxx+
        (T[k(i,j+1,m)]-Tijm2+T[k(i,j-1,m)])/dy
      )+qI)/(CR+Tijm))),
    i:2,
    for j:2 thru Nj-1 do /*приравнивание температур на краю фольги*/
      (T[k(i-1,j,m+1)]:T[k(i,j,m+1)]),
    i:Ni-1,
    for j:2 thru Nj-1 do /*приравнивание температур на краю фольги*/
      (T[k(i+1,j,m+1)]:T[k(i,j,m+1)]),
    j:2,
    for i:2 thru Ni-1 do /*приравнивание температур на краю фольги*/
      (T[k(i,j-1,m+1)]:T[k(i,j,m+1)]),
    j:Nj-1,
    for i:2 thru Ni-1 do /*приравнивание температур на краю фольги*/
      (T[k(i,j+1,m+1)]:T[k(i,j,m+1)]))$
i:floor(Xp/dx)+1$ j:floor(Yp/dy)+1$ /*координаты i, j пробной точки*/
for m:0 thru Nm do
(Tij[m+1]:T[k(i,j,m)]-T0, /*относительная температура в узле в зависимости от времени*/
  t[m+1]:m*dt)$ /*значения текущего времени*/
print(Str)$ /*вывод информации о пробной точке*/
print("Point: i=",i," j=",j," t(s)=",t[Nm+1]," dT(C)=",Tij[Nm+1])$
wxplot2d([discrete, t,Tij],[xlabel,"t, seconds"],[ylabel,"dT, C"])$
m:Nm$
T3d(x,y):-block /*извлечение значения температуры из одномерного массива*/
( i:floor(x/dx)+1,
  j:floor(y/dy)+1,
  float(T[k(i,j,m)]))$
plot3d(T3d(x,y),[x,0,a],[y,0,b], /*построение графика распределения температуры*/
[zlabel,"T, K"],[grid,30,30]),ratprint:false$
kill(all)$

```

Рисунок 2. Текст программы с комментариями.

### Текст программы

Текст программы с комментариями представлен на рис. 2.

Программа создана в системе компьютерной алгебры (СКА) Maxima. Выбор СКА Maxima в качестве платформы для разработки программы обусловлен её обширными возможностями в области решения разнообразных математических задач, включая дифференциальное исчисление, интегрирование, решение уравнений, матричные операции и многое другое. Она подходит студентам младших курсов естественно-научных и инженерных специальностей благодаря своей простоте, универсальности и доступности [4].

### Результаты вычислительного эксперимента

Некоторые результаты моделирования представлены на рисунках 3 и 4.

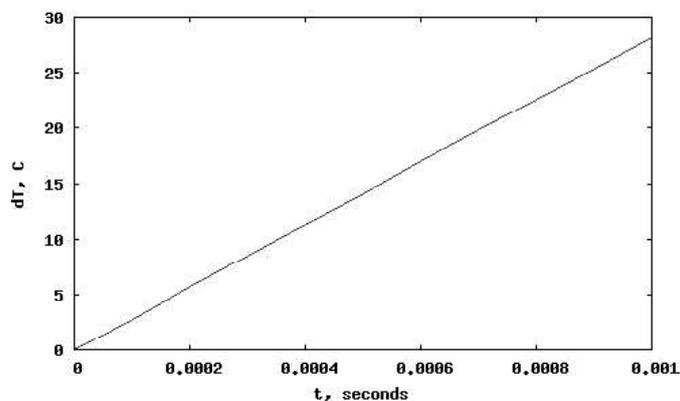


Рисунок 3. График зависимости относительной температуры в пробной точке от времени для оловянной фольги.

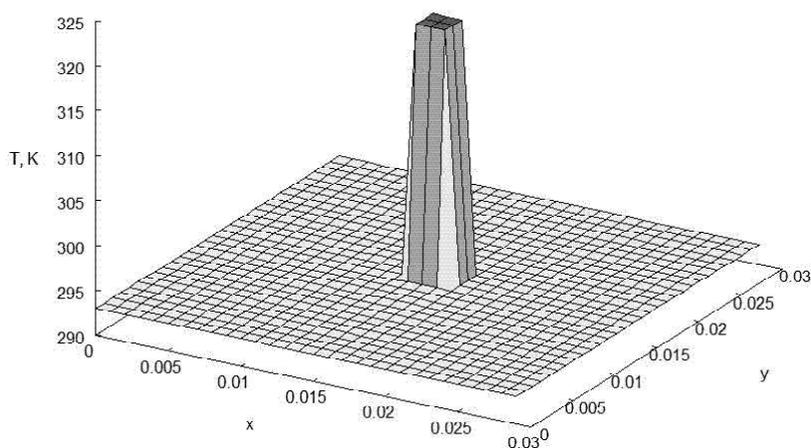


Рисунок 4. График распределения температуры на поверхности оловянной фольги.

Анализ полученных по данной программе результатов позволил исследовать зависимости скорости нагрева различных металлических фольг от их физических характеристик (коэффициента теплопроводности, удельной теплоемкости, произведения удельной теплоемкости на плотность) для пробных точек, находящихся на различных расстояниях по отношению к тепловому источнику.

По итогам научной работы был подготовлен доклад, занявший призовое место в секции «Физические явления и их применение» на студенческой научно-технической конференции «Мореходы – развитию рыбной отрасли Дальнего Востока» [8].

### **Заключение**

Данная работа выполнена в рамках научного проекта по анализу энергоэффективности наружных строительных конструкций. Проведено математическое моделирование процесса теплопроводности в слое металлической фольги, разработана программа в системе компьютерной алгебры *Mathima*. Показано, что студенты младших курсов без специальных навыков могут эффективно работать с *СКА Mathima* благодаря её универсальности, доступности и упрощённой системе управления.

Автор выражает благодарность к.х.н., доценту Слабженникову С.Н. за помощь в разработке и написании программы в системе компьютерной алгебры *Mathima*.

### **Литература**

1. Лебо И.Г., Лебо А.И., Розанова С.А. Методика математического моделирования физических процессов при выполнении исследовательских проектов студентами технических университетов // *Continuum. Математика. Информатика. Образование.* – 2024. – № 3. – С. 46–59.
2. Кононова З.А., Алтухова С.О. Развитие навыков исследовательской деятельности будущих учителей информатики на примере решения задач по моделированию физических процессов // *Ярославский педагогический вестник.* – 2021. – № 6(123). – С. 16–21.
3. Слабженникова И.М. Применение свободной системы компьютерной математики *Mathima* при обучении техническим наукам // *Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Педагогика.* – 2021. – № 4. – С. 52–59.
4. Слабженникова И.М. Информационные технологии в научно-исследовательской работе студентов как средство формирования цифровых компетенций и повышения качества подготовки специалистов рыбной отрасли // *Материалы Международной научно-технической конференции «Водные биоресурсы: рациональное освоение и искусственное воспроизводство».* – Владивосток: Дальрыбвтуз, 2021. – С. 208–214.
5. Слабженникова И.М. Моделирование процесса теплопроводности в системе компьютерной математики *Mathima* // *Физическое образование в вузах.* – 2022. – Т. 28, № 3. – С. 80–86.

6. Кучеренко Л.В., Слабженникова И.М. Компьютерное моделирование процесса распространения гребня волны цунами // Физическое образование в вузах. – 2018. – Т. 24, № 2. – С. 144–152.
7. Мананков В.М. Отражающая теплоизоляция в энергосберегающем строительстве // Вестник МГСУ. – 2011. – № 3. – С. 319–326.
8. Мизин Д.А. Теоретическое исследование эффективности процесса теплоотведения для ряда металлов // Материалы студенческой научно-технической конференции «Мореходы – развитию рыбной отрасли Дальнего Востока». – Владивосток: Дальрыбвтуз, 2025. – С. 181–184.

## **Computer Simulation of the Thermal Conductivity Process in Metal Foil**

I.M. Slabzhennikova

*Far Eastern State Technical Fisheries University  
52b Lugovaya str., Vladivostok, 690087, Russia;  
e-mail: ims2710@gmail.com*

Received October 30, 2025

PACS 01.40.-d, 01.50.H-, 01.55.+b

The paper describes an example of computer modeling of the process of heat conduction through a layer of metal foil. A mathematical model of the physical process has been developed, the program algorithm has been described, and the program text with comments has been presented. The program is implemented in the Maxima computer algebra system, which is suitable for junior students due to its simplicity, versatility, and accessibility. This article presents some results of the computational experiment.

*Keywords:* computer modeling, mathematical model, thermal conductivity, metal foil.

## References

1. *I.G. Lebo, A.I. Lebo, S.A. Rozanova*, Continuum. Mathematics. Computer science. Education, № 3, 46 (2024).
2. *Z.A. Kononova, S.O. Altukhova*, Yaroslavl Pedagogical Bulletin, № 6(123), 16, (2021).
3. *I.M. Slabzhennikova*, Bulletin of the Moscow Region State University. Series: Pedagogics, № 4, 52 (2021).
4. *I.M. Slabzhennikova*, Information technology in students' research work as a means of developing digital competencies and improving the quality of training for specialists in the fishing industry // In: Aquatic bioresources: rational development and artificial reproduction: proceedings of the International Scientific and Technical Conference. (Vladivostok, 2021). – P. 208–214.
5. *I.M. Slabzhennikova*, Physics in Higher Education, **28**, № 3, 80 (2022).
6. *L.V. Kucherenko, I.M. Slabzhennikova*, Physics in Higher Education, **24**, № 2, 144 (2018).
7. *V.M. Manankov*, Vestnik MGSU, № 3, 319 (2011).
8. *D.A. Mizin*, A theoretical study of the efficiency of the heat removal process for a number of metals // In: Seafarers – for the development of the fishing industry in the Far East: Proceedings of the student scientific and technical conference. (Vladivostok, 2025). – P. 181–184.