

## Пондеромоторные силы. 2. Магнетики и нелинейные материалы

Александр Витальевич Максимычев<sup>1</sup>, Леонид Иеронимович Меньшиков<sup>1,2</sup>,  
Петр Леонидович Меньшиков<sup>1,2</sup>, Сергей Анатольевич Сенченков<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), 141701 Россия, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9; e-mail: maksimychav.av@mipt.ru

<sup>2</sup> Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт», 123182 Россия, Москва, пл. Академика Курчатова, 1; e-mail: \_mleonid1954@mail.ru, menshikov2005@mail.ru, senchekov.s@yandex.ru

На основе электродинамики сплошной среды и термодинамики рассматриваются основные проявления пондеромоторных сил, действующих в магнетиках и нелинейных материалах. На конкретных примерах обсуждаются методы решения задач по данной теме. Особое внимание уделяется граничным условиям, в которых наблюдается проявление пондеромоторных сил. Данная тема является одной из наиболее сложных в разделе «Электромагнетизм» курса общей физики. Разобраны неточности и ошибки, встречающиеся в литературе при изложении данной темы.

*Ключевые слова:* пондеромоторные силы, магнетики, нелинейные материалы, термодинамика.

**DOI:** 10.54965/16093143\_2025\_31\_4\_18

### Введение

Силы, действующие на вещество в электромагнитном поле, называют пондеромоторными. Действие этих сил в магнетиках обсудим, предполагая локальную изотропию свойств вещества. Будем рассматривать линейные диэлектрики, в которых  $\mathbf{D} = \mu\mathbf{H}$ , ( $\mu$  – магнитная проницаемость,  $\mathbf{D}$  – индукция,  $\mathbf{H}$  – напряженность магнитного поля).

Пионерские работы [1–4] по изучению пондеромоторных сил выполнены более 100 лет назад, однако исследования по этой теме продолжают и в наше время [5, 6]. Причина состоит в том, что для описания движения вещества нужно знать силу, которая действует на него со стороны поля. Из-за того, что вместе они составляют единую систему, легко присоединить часть силы, действующей на поле, к силе, действующей на вещество. Ошибки при расчёте пондеромоторных сил встречаются в методической литературе и, по нашему мнению, рассматриваемая тема является наиболее сложной в разделе «Электромагнетизм» курса общей физики, поскольку требует привлечения термодинамических представлений. Цель данной работы состоит в том, чтобы на простых примерах из имеющейся литературы, в частности [7–14], обосновать правильные соотношения и формулы.

## 1. Силы в магнетиках

Энергия  $W$  соленоида с током  $I$ , снабжённого сердечником из линейного материала с магнитной проницаемостью  $\mu$  записывается в универсальном, не зависящем от его конкретного устройства виде

$$W = \int dV \frac{H\mathbf{B}}{8\pi} = \frac{1}{2c} I\Phi. \quad (1)$$

Здесь  $\Phi$  поток индукции магнитного поля  $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$  сквозь образованный проводом замкнутый контур  $C$ :

$$\Phi = \int_C d\mathbf{f} \mathbf{B} = \oint_C dr \mathbf{A}, \quad (2)$$

где  $\mathbf{A}$  векторный потенциал. Условимся, что направление обхода провода совпадает с направлением тока в нём, в противном случае получим  $\oint_C dr \mathbf{A} = -\Phi$ .

Рассмотрим два случая:

$$\Phi = \text{const}, \quad (3)$$

$$I = \text{const}. \quad (4)$$

### 1.1. Случай $\Phi = \text{const}$ .

Условие (3) осуществляется, если соленоид изготовлен из замкнутого провода в сверхпроводящем состоянии с бесконечно большой проводимостью ( $\lambda = \infty$ ). При вдвигании в него сердечника в соответствии с законом Фарадея  $\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$  возникает вихревое электрическое поле  $\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ . Оно возбуждает в проводнике токи, магнитное поле которых компенсирует изменение  $\Phi$ . Это поле, в свою очередь, действует на магнит и либо отталкивает его от проводника, либо притягивает. Ряд задач на эту тему имеется в параграфах 6 и 7 сборника [13], рассмотрим подробно решения этих задач.

Рассчитаем силу  $F^{(3)}$ , действующую на сердечник с поперечным сечением  $S$  и длиной  $L$ , частично вдвинутый на длину  $l$  в сверхпроводящий соленоид, имеющий  $n$  витков на единицу длины. Внутри соленоида напряжённость поля постоянна вдоль его длины и равна

$$H = \frac{4\pi n I}{c}. \quad (5)$$

Для соблюдения условия (3) соленоид должен быть накоротко замкнут, причём сверхпроводящим внешним проводом – иначе при продвижении в соленоид сердечника магнитный поток будет уходить через омический участок. Действительно, пусть есть кольцо из сверхпроводящего провода с захваченным внутри него магнитным потоком  $\Phi$ . Известно, что этот поток сохраняется при любых манипуляциях с проводом. Навивая основной участок провода на цилиндр, получаем наш соленоид. Если витков много и соленоид длинный, то практически весь магнитный поток будет находиться внутри соленоида. Оставшаяся, не навитая часть провода, образует внешний провод, замыкающий

соленоид. Если эту часть в исходном кольце нагреть и перевести в нормальное, омическое состояние, то через неё магнитные силовые линии будут «вытекать» наружу.

Соленоид вместе с сердечником и полем представляет собой «тело»: в случае (3) батарея или какой-то другой внешний источник энергии не требуется. Поэтому из (1) для свободной энергии  $\mathcal{F}^{(3)}$  следует:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{(3)}(\Phi, l) &= \int dV \frac{\mathbf{H}\mathbf{B}}{8\pi} = \int dV \frac{\mu H^2}{8\pi} = \\ &= S \frac{H^2}{8\pi} [(\mu-1)l + L] = \frac{\Phi^2}{8\pi S n^2 [(\mu-1)l + L]}. \end{aligned} \quad (6)$$

В (6) учтено, что

$$\Phi = SHn[(\mu-1)l + L] = \frac{4\pi S n^2 I}{c} [(\mu-1)l + L]. \quad (7)$$

Согласно (6), энергия убывает с ростом  $l$ , поэтому сердечник втягивается в соленоид. Это видно и из знака силы, вычисленной из соотношения:

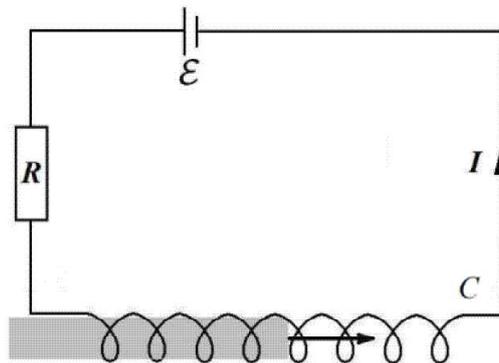
$$F^{(3)}(\Phi, l) = - \left[ \frac{\mathcal{F}^{(3)}(\Phi, l)}{\partial l} \right]_{\Phi} = \frac{\Phi^2 (\mu-1)}{8\pi S n^2 [(\mu-1)l + L]^2} = (\mu-1) S \frac{H^2}{8\pi}. \quad (8)$$

## 1.2. Случай $I = \text{const}$ .

Рассмотрим два примера, когда выполняется условие (4).

### Пример 1. Проводники в нормальном (омическом) состоянии.

Пусть под нашим воздействием за время  $dt$  сердечник сместился на расстояние  $dl$ . Требуется подсчитать изменение свободной энергии «тела», в состав которого входят теперь «соленоид с сердечником + омический провод + батарея».



**Рисунок 1.** Схема для расчета силы, действующей на магнетик в магнитном поле:

$\varepsilon$  – ЭДС батареи,  $R$  – омическое сопротивление,  $I$  – ток,  $C$  – замкнутый контур.

Согласно (4), (5) и (7) напряжённость поля  $H$  не меняется, а магнитный поток изменяется:

$$d\Phi = (\mu - 1)SnHdl. \quad (9)$$

Проводники имеют отличное от нуля активное сопротивление  $R$ , поэтому для поддержания постоянства тока в соленоиде к нему необходимо подключить источник тока с ЭДС  $\varepsilon$  (рис. 1).

Составим уравнение цепи. Чтобы не ошибиться в знаках, следуя [8], запишем обобщённый закон Ома для проводов:

$$\frac{j}{\lambda} = E + E_{\text{СТ}}. \quad (10)$$

Здесь  $j$  – плотность тока в данной точке провода,  $E_{\text{СТ}}$  – эффективное, «стороннее» поле неэлектрической, например, химической природы, действующее внутри источника тока, производящее перенос положительных зарядов внутри него от минуса к плюсу. Интегрируя уравнение (10) по замкнутому контуру  $C$  (вдоль провода и внутри батареи – рис. 1), получаем:

$$\oint dr j / \lambda = \oint dr E + \varepsilon,$$

где по определению стороннего поля  $\oint dr E_{\text{СТ}} = \varepsilon$ . Слева по закону Ома имеем:  $\oint dr j / \lambda = U_R$ , где  $U_R = IR$  напряжение на активном сопротивлении. Справа, с учётом формул (2),  $\oint dr \nabla \varphi = 0$  и

$$E = -\frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t} - \nabla \varphi, \quad (11)$$

получаем:  $\oint dr E = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}$ , что даёт уравнение цепи:

$$U_R = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} + \varepsilon. \quad (12)$$

За время  $dt$  по контуру переносится заряд  $dq = Idt$ . Умножая (12) на  $dq$ , для произведённой батареей работы  $\delta A_{\text{БАТ}} = \varepsilon dq$ , с учётом (9), получим

$$\delta A_{\text{БАТ}} = \delta Q + \delta A_1. \quad (13)$$

Здесь  $\delta Q = U_R dq = IRdt$  – часть этой работы, превратившаяся в джоулево тепло,

$$\delta A_1 = \frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} Idt = \frac{Id\Phi}{c} = S \frac{H^2}{4\pi} (\mu - 1) dl$$

– часть работы, затраченная на намагничивание. Тепло  $\delta Q$  в (13) следует отбросить, поскольку, в приближении изотермического процесса, оно уходит из активного сопротивления в термостат и поэтому не относится более к «телу». Кроме того, ясно, что точно такое же тепло выделяется, когда мы не сдвигаем сердечник. Нас же интересует дополнительная часть  $\delta A_1$  работы батареи, которую она производит из-за того, что мы

воздействуем на сердечник. Из-за этого возникает дополнительное изменение свободной энергии батареи  $d\mathcal{F}'_{\text{БАТ}} = -\delta A_1$ . Следовательно, с учётом (6), под нашим воздействием свободная энергия системы меняется на величину

$$d\mathcal{F}^{(4)}(I, l) = d\mathcal{F}^{(3)} + d\mathcal{F}'_{\text{БАТ}} = -S \frac{H^2}{8\pi} (\mu - 1) dl, \quad (14)$$

что даёт силу

$$F^{(4)}(I, l) = - \left[ \frac{\mathcal{F}^{(4)}(I, l)}{\partial l} \right]_I,$$

совпадающую с (8). Сравнивая результат (14) с  $d\mathcal{F}^{(3)} = S \frac{H^2}{8\pi} (\mu - 1) dl$ , заключаем, что в случае (4) свободная энергия системы даётся формулой

$$\mathcal{F}^{(4)}(I, l) = - \int dV \frac{HB}{8\pi}. \quad (15)$$

Свободные энергии в случаях (3) и (4) отличаются знаком. Аналогичное отличие имеет место для конденсатора при постоянстве на нем либо заряда, либо разности потенциалов [14].

### Пример 2. Сверхпроводящие провода.

В данном случае наличия батареи и резистора не требуется. Возьмём сверхпроводящее кольцо с током и захваченным внутри кольца магнитным потоком  $\Phi_0$ . Из двух частей этого провода накрутим в одинаковую сторону, скажем, по правилу правого винта, два соленоида: один – наш, а другой – с магнитным потоком  $\Phi_1$  и с гораздо большей индуктивностью  $L_1$ . Ток  $I$  через них одинаков. С учётом (1), а также из сохранения суммарного магнитного потока

$$\Phi_1 + \Phi = \Phi_0 = \text{const}, \quad (16)$$

где  $\Phi_1 = L_1 I / c \gg \Phi$ , получаем:

$$\mathcal{F}^{(4)} = \mathcal{F}^{(3)} + \mathcal{F}_1 = \frac{1}{2c} \Phi I + \frac{1}{2c} \Phi_1 I = \frac{1}{2c} \Phi_0 I. \quad (17)$$

Из (16) и (7) имеем:

$$\frac{1}{c} L_1 I + \frac{4\pi S n^2 I}{c} [(\mu - 1)l + L] = \frac{1}{c} L_1 I_0 + \frac{4\pi S n^2 I_0}{c} L = \Phi_0,$$

где  $I_0$  – ток до внесения сердечника в наш соленоид, то есть при  $l = 0$ . Отсюда

$$I = I_0 \frac{L_1 + 4\pi S n^2 L}{L_1 + 4\pi S n^2 [(\mu - 1)l + L]} = I_0 + \Delta I, \quad \Delta I \approx -I_0 \frac{4\pi S n^2 (\mu - 1)}{L_1}. \quad (18)$$

Из (18) и (17), отбрасывая малые второго порядка, снова получаем свободную энергию (15), а, значит, и силу (14).

В заключение данного раздела на конкретном примере установим, когда выполняется условие (4). В случае примера 1 из (12), (9) и (5) следует:

$$I = \frac{\varepsilon}{R + \Delta R}, \quad \Delta R = (\mu - 1) \frac{4\pi m^2}{c^2} i.$$

Рассмотрим, например, опыт по втягиванию жидкого кислорода (парамагнитная жидкость с  $\mu - 1 = 0,004$ ) в соленоид длиной 10 см и диаметром 1 см из медной проволоки толщиной 0,5 мм с числом витков на сантиметр  $n = 20$ . При скорости перемещения жидкости  $i = 1$  см/с относительное изменение тока составит всего лишь  $\Delta I/I \approx \Delta R/R \sim 10^{-16}$ . Столь же мало оказывается изменение тока в примере 2. Таким образом, практически всегда верно условие (4). Сверхпроводящие устройства, как показано в этом разделе, составляют исключение.

## 2. Нелинейные материалы

Нелинейные материалы (сегнетоэлектрики и ферромагнетики) – это вещества, которые проявляют нелинейную зависимость поляризации от напряжённости поляризующего поля и температуры. Для сегнетоэлектриков и ферромагнетиков характерна спонтанная электрическая поляризация и намагниченность, соответственно, в отсутствие внешних полей. Рассмотрим три примера расчёта пондеромоторной силы  $F$ , действующей на нелинейные материалы.

### 2.1. Сегнетоэлектрик

Рассчитаем силу  $F$ , действующую в конденсаторе на сегнетоэлектрическую жидкость или пластину из твёрдого сегнетоэлектрика (рис. 2), вектор поляризации  $\mathbf{P}$  которого описывается зависимостью  $\mathbf{P} = P(E)\hat{\mathbf{E}}$ , где  $\hat{\mathbf{E}} = \mathbf{E}/E$ .

#### 2.1.1. Случай $q = \text{const}$ .

Для нахождения силы надо рассчитать свободную энергию системы  $\mathcal{F}^{(q)}(q, h)$  при фиксированной высоте подъема  $h$ . В общем случае её приращение при изменении заряда конденсатора от  $q$  до  $q+dq$  равно

$$d\mathcal{F}^{(q)}(q, h) = Udq = \int dV \frac{\mathbf{E}(\mathbf{r})\delta\mathbf{D}(\mathbf{r})}{4\pi}. \quad (19)$$

Отсюда и из  $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} = [E + 4\pi P(E)]\hat{\mathbf{E}}$  и  $E\delta\hat{\mathbf{E}} = E\delta(\hat{\mathbf{E}}^2/2) = 0$  имеем:

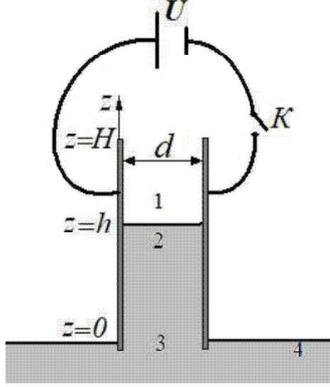


Рисунок 2. Втягивание сегнетоэлектрика в конденсатор.

Пояснения в тексте.

$$d\mathcal{F}^{(q)}(q, h = \text{const}) = \int dV \frac{\mathbf{E} \delta \mathbf{D}}{4\pi} = d \left( \int dV \frac{E^2}{8\pi} \right) + d \left( \int dV \int_0^E EP' dE \right),$$

где  $P' \equiv dP/dE$ . Следовательно

$$\mathcal{F}^{(q)}(h, q) = S_{\perp} H \frac{E^2}{8\pi} + S_{\perp} h \int_0^E EP' dE = S_{\perp} H \frac{E^2}{8\pi} + S_{\perp} h \left( EP - \int_0^E P(E) dE \right). \quad (20)$$

В случае  $q = \text{const}$  поле  $E$  меняется при сдвиге сегнетоэлектрика:  $E = E(h)$ . В верхней и нижней областях конденсатора, помеченных цифрами 1 и 2 на рис. 2, плотности поверхностного заряда равны, соответственно,

$$\sigma_1 = \frac{E}{4\pi}, \quad \sigma_2 = \frac{E + 4\pi P}{4\pi}.$$

Отсюда следует условие

$$\sigma_1 L(H - h) + \sigma_2 Lh = q = \text{const},$$

которое удобно переписать в виде

$$E + 4\pi P(E) \frac{h}{H} = E_0, \quad (21)$$

где  $E_0 = q/(LH)$  поле в пустом конденсаторе. Дифференцируя (20) и (21) по  $h$ , получаем:

$$dE = -\frac{4\pi P}{H + 4\pi h P'} dh,$$

$$d\mathcal{F}^{(q)}(h, q) = -F dh = S_{\perp} (H + 4\pi h P') \frac{EdE}{4\pi} + S_{\perp} dh \int_0^E EP' dE.$$

Отсюда следует формула:

$$F^{(q)} = S_{\perp} \int_0^E P(E') dE'. \quad (22)$$

Входящее в верхний предел интеграла значение поля  $E$  надо находить из неявного уравнения (21).

Для силы, действующей в конденсаторе на вещество с нелинейной зависимостью поляризации  $P(E)$  от электрического поля, в литературе встречается выражение  $F^{(q)} = S_{\perp} P(E) E / 2$ , существенно отличающееся от строгого (22).

### 2.1.2. Случай $U = \text{const}$ .

Теперь, как и в случае (19), можно проинтегрировать слагаемое  $\int dV \frac{\mathbf{D}(\mathbf{r}) \delta \mathbf{E}(\mathbf{r})}{4\pi}$ , а можно сразу воспользоваться формулами (19) и (20), что даёт:

$$\mathcal{F}^{(U)}(U, h) = - \int dV \frac{E^2}{8\pi} - \int dV \int_0^E P(E') dE' - S_{\perp} H \frac{E^2}{8\pi} - S_{\perp} h \int_0^E P(E') dE'.$$

В случае  $U = \text{const}$  при движении сегнетоэлектрика по конденсатору поле не меняется и совпадает с полем  $E_0 = q/(LH)$  в пустом конденсаторе, поэтому при малом изменении  $h$  имеем:

$$d\mathcal{F}^{(U)}(U = \text{const}, h) = -S_{\perp} h \int_0^E P(E) dE,$$

что даёт формулу для силы, совпадающую с (22). Однако, из (21) видно, что  $E < E_0$  в случае  $q = \text{const}$ . Это значит, что для нелинейных материалов сила в случае  $U = \text{const}$  превосходит такую для случая  $q = \text{const}$ . Аналогичное соотношение имеет место и для линейных материалов.

Выражение (19) записано для системы, содержащей два создающих поле проводника – пластины конденсатора с потенциалами  $\varphi_-$  и  $\varphi_+ = \varphi_- + U$  и зарядами  $q_+ = q$  и  $q_- = -q$ . Следовательно, (19) можно переписать в виде  $\mathcal{F}^{(U)} = \mathcal{F}^{(q)} - q_+ \varphi_+ - q_- \varphi_-$ . Отсюда нетрудно догадаться, что для произвольного числа  $N$  проводников с номерами  $a = 1, 2, \dots, N$  имеем:

$$\mathcal{F}^{(U)} = \mathcal{F}^{(q)} - \sum_{a=1}^N q_a \varphi_a = \mathcal{F}^{(q)} - \int \frac{\mathbf{E} \mathbf{D}}{4\pi} dV.$$

Обобщения этого соотношения имеют вид:

$$d\mathcal{F}^{(q)}(q_A, h) = \sum_{A=1}^M \varphi_A dq_A - F^{(q)}(q, h) dh = \int dV \frac{\mathbf{E}(\mathbf{r}) \delta \mathbf{D}(\mathbf{r})}{4\pi} - F^{(q)}(q, h) dh, \quad (23)$$

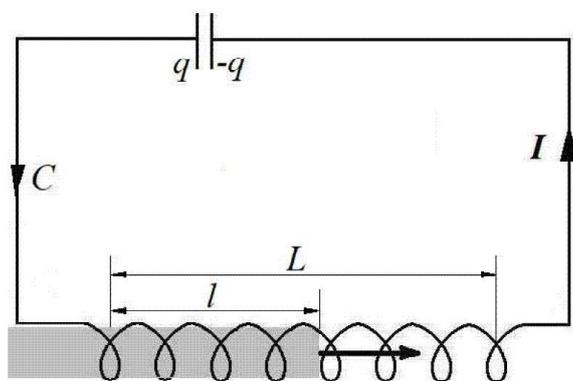
$$d\mathcal{F}^{(U)}(\varphi_B, h) = - \sum_{B=1}^L q_B d\varphi_B - F^{(U)}(U, h) dh = - \int dV \frac{\mathbf{D}(\mathbf{r}) \delta \mathbf{E}(\mathbf{r})}{4\pi} - F^{(U)}(U, h) dh. \quad (24)$$

Здесь  $A = 1, 2, \dots, M$  и  $B = 1, 2, \dots, L$  – номера проводников с постоянными зарядами и потенциалами, соответственно.

## 2.2. Ферромагнетик

Рассчитаем силу  $F$ , действующую в соленоиде с площадью поперечного сечения  $S$  и длиной  $L$  на сердечник с площадью сечения  $s$ , изготовленный из изотропного нелинейного магнетика. Рассмотрим сердечник вдвинутый в соленоид на длину  $l$ . Намагниченность  $\mathbf{M}$  сердечника, то есть магнитный момент единицы объёма, описывается зависимостью  $\mathbf{M} = M(H)\hat{\mathbf{H}}$ , где  $\hat{\mathbf{H}} = \mathbf{H} / H$ .

### 2.2.1. Случай $\Phi = \text{const}$ .



**Рисунок 3.** Иллюстрация к расчету силы, действующей на ферромагнетик, внесенный в соленоид. Пояснения в тексте.

Рассмотрим условие  $\Phi = \text{const}$  (3). В этом случае сердечник вводится в сверхпроводящий соленоид с сохраняющимся магнитным потоком  $\Phi$ . Свободная энергия зависит от двух внешних параметров:  $\Phi$  и  $l$  (сердечник считаем несжимаемым, а температуру  $T$  постоянной, поэтому  $\rho$  и  $T$  из этого списка исключаем). Таким образом,

$$F^{(3)} = - \left[ \frac{\partial \mathcal{F}^{(3)}(\Phi, l)}{\partial l} \right]_{\Phi}. \quad (25)$$

Из (25) ясно, что для нахождения силы надо рассчитать свободную энергию при фиксированном значении  $\Phi$  и заданной длине  $l$  и далее продифференцировать её по  $l$ . С этой целью подключим соленоид к конденсатору с линейным веществом (рис. 3). В этом случае энергия, запасённая в конденсаторе известна и равна  $W_{\text{к}} = qU/2$ . Конденсатор разряжается через соленоид, содержащий нелинейное вещество. Подсчитаем изменение энергии  $dW_{\text{с}}$  соленоида за время  $dt$ . Зная, несложно будет найти и всю энергию  $W_{\text{с}}$ . Провода сверхпроводящие, поэтому внутри них электрическое поле  $\mathbf{E}$  равно нулю. Тогда из (11) и (2) получаем:

$$0 = \int_C d\mathbf{r} \mathbf{E} = U - \frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}. \quad (26)$$

Здесь  $d\Phi$  – изменение магнитного потока в соленоиде за время  $dt$ . Сердечник при этом покоится, то есть  $dl = 0$ . Интеграл берётся вдоль незамкнутого провода от пластины с зарядом « $q$ » к пластине « $-q$ » (контур  $C$  на рис. 3). Домножим соотношение (26) на  $dq = -Idt$ . С учётом  $Udq = dW_k$  получаем закон сохранения энергии:  $dW_k + Id\Phi/c = 0$ . Отсюда ясно, что изменение энергии  $W_c$  соленоида при разрядке через него конденсатора равно

$$dW_c = \frac{1}{c} Id\Phi \equiv d\mathcal{F}^{(3)}. \quad (27)$$

Преобразуем (27) согласно правилам векторного анализа (см. Приложение)

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} Id\Phi &= \frac{1}{c} I \oint dr \delta\mathbf{A} = \frac{1}{c} \int dV \mathbf{j} \delta\mathbf{A} = \frac{1}{4\pi} \int dV (\nabla \times \mathbf{H}) \delta\mathbf{A} \equiv \\ &\equiv \frac{1}{4\pi} \int dV (\nabla \times \underline{\mathbf{H}}) \delta\mathbf{A} = -\frac{1}{4\pi} \int dV (\nabla \times \mathbf{H}) \underline{\delta\mathbf{A}} = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int dV \mathbf{H} (\underline{\delta\mathbf{A}} \times \nabla) = \frac{1}{4\pi} \int dV \mathbf{H} (\nabla \times \underline{\delta\mathbf{A}}) = \int dV \frac{\mathbf{H} \delta\mathbf{B}}{4\pi}. \end{aligned}$$

Здесь для изменения  $d\mathbf{A}(\mathbf{r})$ , не являющегося полным дифференциалом, использовано общепринятое обозначение  $\delta\mathbf{A}$ . Таким образом

$$d\mathcal{F}^{(3)}(\Phi, l) = \int dV \frac{\mathbf{H} \delta\mathbf{B}}{4\pi}. \quad (28)$$

Из (28) и соотношения  $\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}$  следует:

$$d\mathcal{F}^{(3)}(\Phi, l) = \int dV \frac{\mathbf{H} \delta\mathbf{B}}{4\pi} = \frac{1}{4\pi} \int dV (H\delta H + 4\pi H M' \delta H), \quad (29)$$

где  $M' \equiv dM / dH$ . Выражение (29) представляет собой сумму вкладов от каждого элемента объёма  $dV$ . Поскольку  $H\delta H = \delta(H^2/2)$  и  $HM'\delta H = \delta\left(\int_0^H HM'dH\right)$ , то (29) интегрируется, что даёт

$$\mathcal{F}^{(3)}(\Phi, l) = V \frac{H^2}{8\pi} + v \int_0^H HM'dH,$$

где  $V = SL$  – объём соленоида,  $v = sl$  – объём находящейся внутри него части сердечника. Магнитный поток сохраняется и равен:

$$\Phi(l) = (S - s)Hnl + s(H + 4\pi M)nl + SHn(L - l) = n(HV + 4\pi Mv) = nH_i V. \quad (30)$$

Здесь  $H_i$  – напряжённость в отсутствие сердечника, определяемая формулой (5). Из  $\Phi(l) = \text{const}$  следует, что при сдвиге сердечника на  $dl$  вследствие изменения тока напряжённость поля меняется на величину

$$dH = -\frac{4\pi M}{V + 4\pi M'v} dv.$$

Отсюда и из (30) получаем соотношение:

$$\begin{aligned}
 d\mathcal{F}^{(3)}(\Phi, l) &= -Fdl = d\mathcal{F}_{\Pi} = V \frac{HdH}{4\pi} + dv \int_0^H HM'dH + vHM'dH = \\
 &= -dv \int_0^H M(H)dH.
 \end{aligned}$$

В предыдущем выражении было проведено интегрирование по частям:

$$\int_0^H HM'dH = MH - \int_0^H M(H')dH'.$$

Следовательно, в случае (3)

$$F = - \left[ \frac{\partial \mathcal{F}^{(3)}(\Phi, l)}{\partial l} \right]_{\Phi} = s \int_0^H M(H')dH'. \quad (31)$$

В качестве примера рассмотрим связь между намагниченностью и магнитным полем, задаваемую соотношением

$$M(H) = M_{\text{НАС}}(1 - e^{-H/H_0}) \quad (32)$$

(такое соотношение предлагается использовать в задаче 7.77 из [13]). При этих условиях из (31) находим:

$$F = s \int_0^H M(H')dH' = sM_{\text{НАС}}[H - H_0(1 - e^{-H/H_0})]. \quad (33)$$

Согласно (30), входящее сюда текущее значение напряжённости поля  $H(l)$  находится из неявного уравнения

$$H + 4\pi \frac{sl}{SL} M_{\text{НАС}}(1 - e^{-H/H_0}) = H_i. \quad (34)$$

Вместо (33) в задаче 7.77 из [13] использовано выражение  $F = sM(H)H/2$ , что довольно заметно отличается от (34).

### 2.2.2. Случай $I = \text{const}$ .

От переменных  $(\Phi, l)$  требуется перейти к переменным  $(I, l)$ , причём в тройке  $(\Phi, I, l)$  два любых параметра независимы, а третий выражается через них. Воспользуемся известной аналогией. В термодинамике переход от «рабочих» переменных  $(S, V)$  (энтропия, объем) к переменным  $(T, V)$  (температура, объем) (преобразование Лежандра) означает переход от внутренней энергии тела  $U(S, V)$  к свободной энергии Гельмгольца  $\mathcal{F}(V, T) = U(S, V) - TS$ . При этом вместо полного дифференциала  $dU = TdS - pdV$  получаем новый  $d\mathcal{F} = -SdT - pdV$ . Аналогично поступаем в нашем случае для перехода от внешних параметров  $(\Phi, l)$  к переменным  $(I, l)$ , опираясь на соотношения (27) и (28), вводим свободную энергию

$$\mathcal{F}^{(4)} = \mathcal{F}^{(3)} - \frac{1}{c} I \Phi = \mathcal{F}^{(3)} - \int dV \frac{\mathbf{H}\mathbf{B}}{4\pi}, \quad (35)$$

для которой

$$d\mathcal{F}^{(4)} = -\frac{1}{c} \Phi dI = -\int dV \frac{\mathbf{B}\delta\mathbf{H}}{4\pi}. \quad (36)$$

Из (36) и соотношения  $\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}$  следует:

$$\begin{aligned} d\mathcal{F}^{(4)} &= -\int dV \frac{\mathbf{B}\delta\mathbf{H}}{4\pi} = -\frac{1}{4\pi} \int dV (H\delta H + 4\pi M\delta H) = \\ &= -\int dV \delta \left( \frac{H^2}{8\pi} \right) - \int dV \delta \left( \int_0^H M(H) dH \right). \end{aligned}$$

Отсюда, а также и из (35) следует:  $\mathcal{F}^{(4)} = -VH^2/8\pi - \nu \int_0^H M(H) dH$ .

В случае (4)  $H(l) = \text{const}$ , что снова приводит к формулам (31) и (33), но на этот раз вместо (34) имеем

$$H = H_i. \quad (37)$$

Из сравнения (34) и (37) ясно, что в случае (3)  $H(l) < H_i$ , поэтому при одинаковых соленоидах и токах в них сила, втягивающая сердечник в омический соленоид превосходит таковую в случае сверхпроводника.

В задаче 7.77 из [13] рассмотрен случай (4) при  $n = 20 \text{ см}^{-1}$ ,  $I = 10 \text{ А}$ ,  $S \gg s = 0,8 \text{ см}^2$ ,  $H_0 = 250 \text{ Э}$ ,  $M_{\text{НАС}} = 1600 \text{ Гс}$ . По формулам (33), (37) для этих значений получаем:

$$F = 1,2 \text{ Н}. \quad (38)$$

### 3. Смешанный случай.

При рассмотрении энергии и пондеромоторных сил, действующих на диэлектрики и магнетики, обнаруживается известная аналогия между переменными:  $q \leftrightarrow \Phi$ ;  $U \leftrightarrow I$ ;  $C \leftrightarrow L$  (заряд  $q$  – поток вектора магнитной индукции  $\Phi$ , потенциал  $U$  – ток  $I$ , емкость  $C$  – индуктивность  $L$ ). Помимо рассмотренных выше «чистых» случаев  $\Phi = \text{const}$  и  $I = \text{const}$ , которым в электростатике соответствуют условия  $q = \text{const}$  (когда проводники изолированы), либо  $U = \text{const}$  (постоянные потенциалы на проводниках поддерживаются внешним источником ЭДС) возможны и смешанные случаи, когда имеет место и то, и другое. В качестве примера рассмотрим задачу: «Плоский конденсатор залит нелинейной жидкостью с зависимостью  $D=D(E)$ . Расстояние между пластинами равно  $L$ , их площадь  $S$ , напряжение между ними  $U$ , заряды на них равны, соответственно,  $q$  и  $-q$ . Внутрь вставлена металлическая пластина с зарядом  $q_0$ , удерживаемая на расстоянии  $l$  от пластины с зарядом  $q$ . Требуется найти: 1) действующую на вставку силу  $F$ ; 2) заряд  $q$ ; 3) потенциал  $\phi(q_0)$  на вставке».

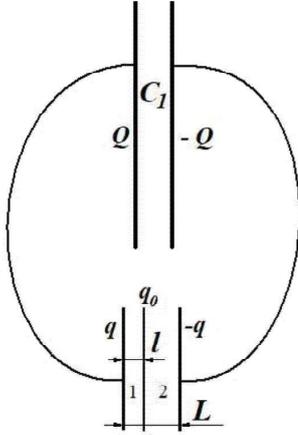


Рисунок 4. Иллюстрация к задаче о конденсаторе, заполненном нелинейной диэлектрической жидкостью.

Эту задачу можно решить с помощью вспомогательного конденсатора большой ёмкости  $C_1$  (рис. 4). По общей формуле (20), из которой, с учётом зависимости  $D=D(E)$ , получаем (22) и свободную энергию «тела», изображённого на рис. 4:

$$\mathcal{F} = \frac{C_1 U^2}{2} + S l W_{\text{эл}}(E_1) + S(L-l)W_{\text{эл}}(E_2). \quad (39)$$

Мы опустили несущественное, независящее от  $l$  слагаемое, порождённое полем вне конденсатора. В (39)  $U = Q/C_1$  – напряжения на конденсаторах,  $E_{1,2}$  – электрические поля между пластинами конденсатора и вставкой. Эти поля находятся из совместного решения двух неявных уравнений

$$D_2 - D_1 = \frac{4\pi q_0}{S}, \quad lE_1 + (L-l)E_2 = U, \quad (40)$$

где  $D_{1,2} \equiv D(E_{1,2})$ . Первое из соотношений (40) является следствием теоремы Гаусса.

Конденсатор содержит три пластины, у которых имеются шесть поверхностей с поверхностными плотностями заряда на них  $\sigma_i$  с номерами на рис. 4 слева направо  $i = 1, \dots, 6$ . При этом

$$q_0 = S(\sigma_3 + \sigma_4). \quad (41)$$

Внутри пластины с зарядом  $q$  поле равно нулю, так же, как и внутри двух других, что по принципу суперпозиции даёт три уравнения:

$$2\pi(\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_4 - \sigma_5 - \sigma_6) = 0. \quad (42)$$

Из теоремы Гаусса, кроме того, получаем:

$$\sigma_2 = -\sigma_3 = \frac{D_1}{4\pi}, \quad \sigma_4 = -\sigma_5 = \frac{D_2}{4\pi}. \quad (43)$$

Из системы шести уравнений (41)–(43) находим шесть неизвестных  $\sigma_i$ , что даёт:

$$q = S(\sigma_1 + \sigma_2) = \frac{q_0}{2} + \frac{S D_1}{4\pi}.$$

Из рис. 4 ясно, что имеет место закон сохранения  $Q + q = \text{const}$ , который перепишем в виде:

$$U = U_0 + \Delta U, \quad \Delta U = \frac{1}{C_1} K, \quad K = \frac{S}{4\pi} (D_0 - D_1) - \frac{q_0}{2}. \quad (44)$$

Здесь  $U_0, D_0 \equiv D(E_0)$  и  $E_0$  – величины, соответствующие  $q_0 = 0$ , что равносильно отсутствию металлической вставки. Из (39) и (44), опуская постоянные, не относящиеся к нашему конденсатору – «телу», а также малые ( $\propto 1/C_1$ ) слагаемые, получаем

$$\mathcal{F}(U, q_0, l) = -\frac{1}{2} (q + q_0) U + S l W_{\text{эл}}(E_1) + S(L-l) W_{\text{эл}}(E_2). \quad (45)$$

Из (45), в согласии с (26) и аналогично (8), получаем:

$$d\mathcal{F}(U, q_0, l) = -q dU + \varphi(q_0) dq_0 - F dl, \quad (46)$$

где  $F = S[W_{\text{эл}}(E_2) - W_{\text{эл}}(E_1)]$  – сила, действующая на вставку,  $\varphi(q_0) = U/2 - lE_1$  – потенциал вставки (при этом потенциал пластины с зарядом  $q$  равен  $U/2$ ).

Очевидное обобщение (23), (24) и (46) имеет вид:

$$d\mathcal{F}(q_A, \varphi_B) = \sum_{A=1}^M \varphi_A dq_A - \sum_{B=1}^L q_B d\varphi_B - F dh.$$

В отличие от (23) и (24) первые два слагаемых в правой части (46) уже нельзя привести к интегралу по объёму. Дальнейшие, достаточно очевидные обобщения, объединяющие случаи  $q = \text{const}$ ,  $U = \text{const}$ , (3) и (4), возникают при наличии одновременно электрического и магнитного полей.

Таким образом, случаи  $q = \text{const}$ ,  $U = \text{const}$  в электрических, и  $\Phi = \text{const}$ , и  $I = \text{const}$  в магнитных явлениях, далеко не исчерпывают все возможности, и на практике приходится производить более детальные расчёты, подобные приведённому в данном разделе.

#### 4. Неточности в методической литературе.

Использование формулы  $f_M = (M\nabla)\mathbf{B}$  в ценнейшей в методическом отношении книге [15] привело к ошибке в решении задачи 7.58 из [13] о силе, втягивающей сердечник в соленоид: полученный в [15] ответ к этой задаче отличается от правильного (8), приведённого в [13].

В [13] не приведено решение задачи 7.77 и дан только ответ  $F = 1$  Н, который отличается от правильного (38). Такой ответ получается, если в (31) сначала принять линейное приближение  $M(H) \propto H$ , что даёт  $F = sHM(H)/2$ , и после этого подставить заданную в условии задачи нелинейную зависимость (32), что, конечно же, неверно.

Разобранные в данном разделе примеры показывают, что при расчёте пондеромоторных сил важно внимательно следить за условиями осуществления того или иного опыта и строго формулировать граничные условия.

Работа проведена, в том числе, в рамках выполнения государственного задания НИЦ «Курчатовский институт».

## Приложение

### Необходимые сведения из векторного анализа

Выражения, подобные (27), преобразуют, применяя интегрирование по частям и обобщённую теорему Гаусса. Имеем интеграл по объёму  $V$  вида  $I = \int dV A \nabla_{\alpha} B \equiv \int dV A \nabla_{\alpha} \underline{B}$ . Здесь  $A$  и  $B$  – функции координат,  $\nabla_{\alpha} \equiv \partial / \partial x_{\alpha}$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$ , то есть  $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$ . Чертой снизу обозначаем выражение, которое дифференцируется. При этом  $\alpha$  может быть как свободным, индексом, которому мы можем давать значения (в этом случае  $I$  представляет собой сразу три интеграла  $I_{\alpha}$ ), а может быть «немым» индексом, по которому, независимо от нас, идёт суммирование. Например,  $\nabla \cdot \mathbf{u} \equiv \sum_{\alpha=1}^3 \nabla_{\alpha} u_{\alpha} \equiv \nabla_{\alpha} u_{\alpha}$  (далее вместо длинной записи суммирования по индексам будем применять короткую:  $\mathbf{ab} \equiv \sum_{\alpha=1}^3 a_{\alpha} b_{\alpha} \equiv a_{\alpha} b_{\alpha}$ ; в математике это правило называют «условием о суммировании по повторяющимся индексам»).

Поскольку  $A \nabla_{\alpha} B = -B \nabla_{\alpha} A + \nabla_{\alpha}(AB)$ , или, что то же самое,  $A \nabla_{\alpha} \underline{B} = \underline{A} \nabla_{\alpha} \underline{B} - \underline{A} \nabla_{\alpha} B$ , то  $I = I_1 + I_2$ , где  $I_1 = \int dV \nabla_{\alpha}(AB) \equiv \int dV \underline{A} \nabla_{\alpha} \underline{B}$ ,  $I_2 = - \int dV B \nabla_{\alpha} A \equiv - \int dV \underline{A} \nabla_{\alpha} B$ .

По теореме Гаусса получаем интеграл по поверхности, охватывающей рассматриваемый объём:  $I_1 = \int df_{\alpha} AB \equiv \int A df_{\alpha} B$ . Здесь  $df = \mathbf{n} df$  – внешняя по отношению к  $V$  площадка, то есть вектор с модулем, равным площади  $df$  малого элемента поверхности  $\Gamma$ , охватывающей объём  $V$ ,  $\mathbf{n}$  – единичный вектор, направленный наружу (внешняя нормаль к поверхности  $\Gamma$ ). Собирая всё вместе, получаем:  $\int dV A \nabla_{\alpha} B = - \int dV \underline{B} \nabla_{\alpha} A + \int A df_{\alpha} B$ . Здесь в поверхностном интеграле элемент  $df_{\alpha}$  стоит именно на том месте, на котором в исходном объёмном интеграле стоял оператор  $\nabla_{\alpha}$ , то есть, в целом, происходит замена  $dV \nabla_{\alpha} \rightarrow df_{\alpha}$ . Часто интегрирование производится по всему объёму, поэтому получающиеся интегралы по бесконечно удалённой поверхности  $\Gamma$  обращаются в ноль, поскольку там исчезают физические величины  $A$  и  $B$ . Так как в выражении  $\underline{B} \nabla_{\alpha} A$  чертой снизу уже указан дифференцируемый множитель, то  $\nabla_{\alpha}$  считается обычным вектором, не дифференциалом. После этого выражение  $\underline{B} \nabla_{\alpha} A$  по обычным векторным правилам преобразуется к такому виду, чтобы  $A$  оказался слева от наблы, а  $B$  справа, после чего нижнюю черту можно опустить.

## Литература

1. *Helmholtz H.* // Ann. d. Phys. Chem. – 1881. – Vol. 12. – P. 385-401.
2. *Minkowski H.* // Math. Annalen. – 1910. – Vol. 68. – P. 472-490.

3. *Abraham M.* // *Rend. Circ. Matem. Palermo.* – 1909. – Vol. 28. – P. 1-19.
4. *Abraham M.* // *Rend. Circ. Matem. Palermo.* – 1910. – Vol. 30. – P. 33-45.
5. *Павлов В.И.* // *УФН.* – 1978. – Т. 124. – С. 345–349.
6. *Макаров В.П., Рухадзе А.А.* // *УФН.* – 2009. – Т. 179. – С. 995–1001.
7. *Абрагам М., Беккер Р.* Теория электричества. – Москва-Ленинград: ГОНТИ НКТП СССР, 1939.
8. *Тамм И.Е.* Основы теории электричества. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2003.
9. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2005.
10. *Гинзбург В.Л.* Теоретическая физика и астрофизика. Дополнительные главы. – Москва: Наука, 1981.
11. *Walker G.B., Lahoz D.G.* // *Nature.* – 1975. – Vol. 253. – P. 339–340.
12. *Brevick I.* // *International Journal of Modern Physics A.* – 2022. – Vol. 37. – № 11n12. – P. 2230007.
13. *Козел С.М., Лейман В.Г., Локшин Г.Р., Овчинкин В.А., Прут Э.В.* Сборник задач по общему курсу физики. Часть 2. Электричество и магнетизм. Оптика. – Москва: Физматкнига, 2023.
14. *Кириченко Н.А.* Электричество и магнетизм. – Москва: МФТИ, 2017.
15. *Корявов В.П.* Методы решения задач в общем курсе физики. Электричество и магнетизм. – Москва: Студент, 2011.

## Ponderomotive Forces. 2. Magnetics and Nonlinear Materials

A.V. Maksimychев<sup>1</sup>, L.I. Menshikov<sup>1,2</sup>,  
P.L. Menshikov<sup>1,2</sup>, S.A. Senchenkov<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> *Moscow Institute of Physics and Technology*  
141701 Russia, Moscow region, Dolgoprudny, Institutsky lane, 9;  
e-mail: maksimychев.av@mipt.ru

<sup>2</sup> *National Research Center «Kurchatov institute»*  
123182 Russia, Moscow Academician Kurchatov Square, 1;  
e-mail: mleonid1954@mail.ru, menshikov2005@mail.ru, senchekov.s@yandex.ru

Received November 25, 2025

PACS 52.35.Mw; 75.90.+w

Based on the electrodynamics of a continuous medium and thermodynamics, the main manifestations of the ponderomotive forces acting in ferromagnetics and nonlinear materials are considered. Methods of solving problems on this topic are discussed using specific examples. Special attention is paid to the boundary conditions in which the manifestation of the ponderomotive forces is observed. This topic is one of the most complex in the «Electromagnetism» section of the general physics course. The inaccuracies and errors found in the literature when presenting this topic are analyzed.

*Keywords:* ponderomotive forces, magnetics, nonlinear materials, thermodynamics.

### References

1. *Helmholtz H.* // Ann. d. Phys. Chem. – 1881. – Vol. 12. – P. 385-401.
2. *Minkowski H.* // Math. Annalen. – 1910. – Vol. 68. – P. 472-490.
3. *Abraham M.* // Rend. Circ. Matem. Palermo. – 1909. – Vol. 28. – P. 1-19.
4. *Abraham M.* // Rend. Circ. Matem. Palermo. – 1910. – Vol. 30. – P. 33-45.
5. *Pavlov V.I.* // Physics Uspekhi. – 1978. – Vol. 124. – P. 345-349.
6. *Makarov V.P., Rukhadze A.A.* // Physics Uspekhi. – 2009. – Vol. 179. – P. 995-1001.
7. *Abraham M., Becker R.* Theory of electricity. – Moscow-Leningrad: GONTI NCTN USSR, 1939.
8. *Tamm I.E.* Fundamentals of the theory of electricity. – Moscow: PHYSMATHLIT, 2003.
9. *Landau L.D., Lifshitz E.M.* Electrodynamics of continuous media. – Moscow: PHYSMATHLIT, 2005.

10. *Ginzburg V.L.* Theoretical Physics and Astrophysics. Additional Chapters. – Nauka, 1981.
11. *Walker G.B., Lahoz D.G.* // Nature. – 1975. – Vol. 253. – P. 339-340.
12. *Brevick I.* // International Journal of Modern Physics A. – 2022. – Vol. 37. – № 11n12. – P. 2230007.
13. *Kozel S.M., Leiman V.G., Lokshin G.R., Ovchinkin V.A., Prut E.V.* Collection of problems on the general course of physics. Part 2. Electricity and magnetism. Optics. – Moscow: PhysMathBook, 2023.
14. *Kirichenko N.A.* Electricity and Magnetism. – Moscow: MIPT, 2017.
15. *Koryavov V.P.* Methods of solving problems in the general course of physics. Electricity and magnetism. – Moscow: Student, 2011.