

УДК 537.226

Математические методы решения физических задач о распространении волн в упругих средах

Николай Павлович Калашников, Алексей Юрьевич Матрончик,
Татьяна Алексеевна Семенова

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
115409 Россия, Москва, Каширское ш., 31; e-mail: kalash@mephi.ru,
matronchik2004@mail.ru, contreraskosha@yandex.ru

Исследуется использование математического аппарата в решении физических задач по разделу упругие волны. Описываются параметры сейсмических волн, возникающих при землетрясениях. Рассматриваются поверхностные сейсмические волны: волны Рэлея и волны Лява. Оцениваются средняя частота и средняя скорость этих волн, а также расстояние между регистратором и эпицентром землетрясения. Исследуется конус Маха, возникающий в том случае, когда источник звуковых волн движется со скоростью, превышающей скорость звука.

Ключевые слова: математика, физика, задачи по упругим волнам, землетрясения, сейсмические волны, поверхностные волны, волны Рэлея и волны Лява, звуковые волны, сверхзвуковая скорость, конус Маха, ударная волна.

DOI: 10.54965/16093143_2025_31_4_5

Бросая в воду камешки,
Смотри на круги, ими образуемые;
Иначе такое бросание будет пустою забавою.
Сочинения Козьмы Пруткова.
Мысли и афоризмы. №156.

1. Введение

В предыдущих статьях [1–5] мы показали тесную связь физики и математики в решении задач по механике, электростатике, электрическому току, магнитному полю и электромагнитным волнам. Теперь перейдем к решению задач с упругими волнами. Будем рассматривать поверхностные сейсмические волны и звуковые волны.

Большим бедствием человечества являются землетрясения. Существует много причин землетрясений: взрывы природного или техногенного происхождения, природные разломы, мощные подвижки частей земной поверхности. При землетрясениях, которые играют роль возмущений, в толще Земли распространяются как поперечные волны, так и продольные волны. В твёрдом теле тоже могут существовать как поперечные, так и продольные волны, поскольку атомы и молекулы могут колебаться относительно их положения равновесия в любом направлении. Однако в жидкости или газе могут распространяться только продольные волны, так как благодаря текучести жидких сред в

поперечном направлении на частицы не действует возвращающая сила. Это свойство помогло геофизикам сделать вывод о существовании жидкого ядра Земли, поскольку обнаружено, что в диаметральном направлении сквозь Землю проходят только продольные волны, поперечные же никогда не регистрируются. Единственным возможным объяснением этого является наличие у Земли жидкого (расплавленного) ядра. Существуют ещё волны и третьего типа, называемые поверхностными волнами, которые распространяются на границе раздела двух сред.

От очага землетрясения разбегаются сейсмические волны, вызывающие огромные разрушения на своем пути. На рис. 1 приведена в разрезе структура нашей планеты [6]. Сейсмические волны бывают двух типов: поверхностные и объемные. При объемных землетрясениях сейсмические волны пронизывают всю землю насквозь, проходя через ядро Земли.

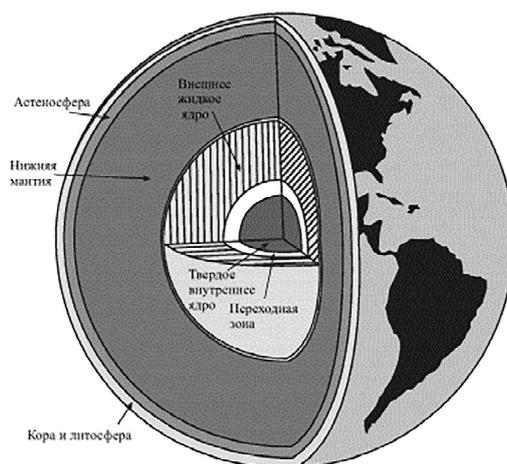


Рисунок 1. Схема строения Земли [6].

Магнитуда землетрясения [7] – величина, характеризующая энергию, выделившуюся при землетрясении в виде сейсмических волн. Первоначальная шкала магнитуды была предложена американским сейсмологом Чарльзом Фрэнсисом Рихтером в 1935 году, поэтому в обиходе значение магнитуды подразумевается по шкале Рихтера. Рихтер предложил для оценки силы землетрясения (в его эпицентре) десятичный логарифм перемещения A (в микрометрах) иглы стандартного сейсмографа Вуда–Андерсона, расположенного на расстоянии не более 600 км от эпицентра: $M_R = \lg A + f$, где f – корректирующая функция, вычисляемая по таблице в зависимости от расстояния до эпицентра. Энергия землетрясения примерно пропорциональна $A^{3/2}$, то есть увеличение магнитуды на 1,0 соответствует увеличению амплитуды колебаний в 10 раз и увеличению энергии примерно в 32 раза.

Эта шкала имела несколько существенных недостатков:

- Рихтер использовал для градуировки своей шкалы малые и средние землетрясения южной Калифорнии, характеризующиеся малой глубиной очага.
- Из-за ограничений используемой аппаратуры шкала Рихтера была ограничена значением около 6,8.
- Предложенный способ измерения учитывал только поверхностные волны, в то время как при глубинных землетрясениях существенная часть энергии выделяется в форме объёмных волн.

В течение следующих нескольких десятков лет шкала Рихтера уточнялась и приводилась в соответствие с новыми наблюдениями. Сейчас существует несколько производных шкал: различные способы измерения магнитуды землетрясений являются приближениями к «идеальной» энергетической шкале: $M = 2/3(\lg E - 4,8)$, где E – энергия землетрясения в джоулях. Сейсмическая энергия, выделяемая при подземном ядерном взрыве мощностью в 1 мегатонну ($4,184 \cdot 10^{15}$ Дж), эквивалентна землетрясению с магнитудой около 6.

За год на Земле происходит примерно:

- 1 землетрясение с магнитудой 8,0 и выше;
- 10 – с магнитудой 7,0–7,9;
- 100 – с магнитудой 6,0–6,9;
- 1000 – с магнитудой 5,0–5,9.

Сильнейшее зарегистрированное землетрясение в истории современных наблюдений произошло в Чили в 1960 году, его магнитуда составляла 9,5.

Энергия, переносимая волнами [8].

Волны переносят энергию в пространстве. Когда волны распространяются через среду плотностью ρ , энергия передается в виде энергии колебаний от одной частицы среды к другой. В синусоидальной волне с частотой ω частицы среды совершают гармонические колебания, так что каждая частица обладает энергией $E = kA^2/2$, где A максимальное смещение (амплитуда колебаний) частицы от положения равновесия либо в продольном, либо в поперечном направлении. Используя выражение $k = m\omega^2$, можно записать:

$$E = m\omega^2 A^2/2 = \rho S v t \omega^2 A^2/2,$$

где S – площадь поперечного сечения, vt – расстояние, которое волна проходит за время t (здесь v – скорость волны). Если рассмотреть передний фронт синусоидальной волны, подошедший к области, где не было волнового движения, то станет ясно, что эта энергия соответствует средней энергии, которая переносится волной через границу рассматриваемой области за время t . Итак, $E \sim A^2$ – энергия, переносимая волной, пропорциональна квадрату её амплитуды. Следовательно, средняя мощность (энергия, пере-

носимая волной, за единицу времени) $P = \rho S v \omega^2 A^2 / 2$. Таким образом, интенсивность волны определяется как средняя мощность, переносимая волной через единицу площади поверхности, перпендикулярной направлению потока энергии $J = \rho v \omega^2 A^2 / 2$.

Амплитуда обратно пропорциональна расстоянию от источника (эпицентра) [8].

Если волны распространяются от источника во всех направлениях (волны при землетрясениях), то мы имеем дело с трехмерной волной. В изотропной среде (т.е. среде, свойства которой одинаковы по всем направлениям) такая волна имеет сферическую форму и называется сферической волной. По мере распространения волны от источника она распределяется по всё большей площади $S = 4\pi R^2$, пропорциональной квадрату её радиуса R . В силу сохранения энергии $E = \rho S v t \omega^2 A^2 / 2$ следует, что по мере увеличения площади амплитуда волны A должна убывать. Иначе говоря, $A_{\max 2} / A_{\max 1} = R_1 / R_2$, т.е. амплитуда обратно пропорциональна расстоянию от источника.

2. Сейсмические волны

Поверхностные наиболее разрушительны и часто возникают из-за движения частей литосферы (литосферной плиты, см. рис. 1). Литосфера расколота на 10 больших плит. Под плитами находится тонкий слой, называемый астеносферой. Этот слой имеет малую вязкость и ведет себя как жидкость. Плиты «плавают» на этом слое и могут подлезать одна под другую. Если в этом медленном процессе (явлении субдукции) ввиду неровности поверхностей плит где-то возникает сцепление, а продолжающееся движение плит приводит к разрыву зацепа, это приводит к сильным возмущениям среды, возбуждающим сейсмические волны. Такие зацепы являются очагами землетрясений. Пример множества этих явлений – «огненное кольцо» землетрясений, окружающее Тихий океан. С ним связаны частые землетрясения в Японии, Китае, Индонезии, в западных частях Северной и Южной Америки. В США в западном штате Орегон заботливо охраняются старые заповедники «городов» из черных «пирамид» и высоких «статуй», созданных потоками от извержений вулканов и землетрясений. Причиной их были перемещения Тихоокеанской и Северо-Американской литосферных плит.

Рассмотрим поверхностные сейсмические волны. Существуют два вида поверхностных волн: волны Рэлея и волны Лява. Название волн Лява происходит от фамилии английского математика Огастеса Эдварда Хаффа Лява (August Edward Hough Love), который в 1911 году теоретически исследовал этот тип сейсмических волн. Волны обладают дисперсией (их скорость зависит от частоты волны [9]) и распространяются в земной мантии с разными групповыми скоростями. Зависимость групповых скоростей обеих волн от их периода изображена на рис. 2.

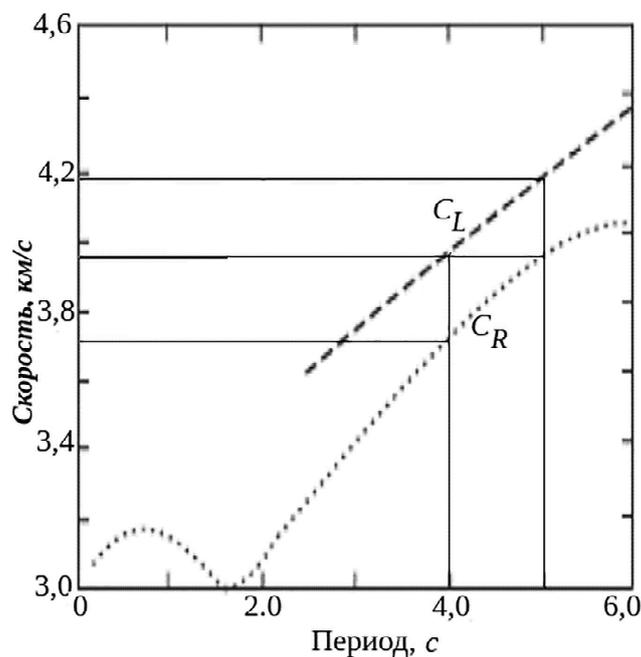


Рисунок 2. Зависимость скорости поверхностных волн от периода колебаний.

C_R — скорость волны Рэля, C_L — скорость волны Лява.

Скорость распространения волны Лява выше скорости волны Рэля.

Задача 1.

С помощью рис. 2 оценить:

- а) среднюю частоту волн вблизи периода колебаний $T = 45$ секунд, б) среднюю скорость каждой из волн в интервале периодов 40-50 секунд.

Решение:

- а) Средний период колебаний (рис. 2) в заданном диапазоне примем равным $T = 45$ с. Средняя частота волны равна

$$v = \frac{1}{T} = \frac{1}{45} = 0,022 \text{ Гц.} \quad (1)$$

- б) Для оценки скорости считаем участки кривых в заданном интервале периодов прямолинейными. Тогда средняя скорость волны Лява равна приблизительно $C_L \approx \frac{4,2+4,0}{2} \approx 4,1$ км/с, а скорость волны Рэля $C_R \approx \frac{3,7+3,9}{2} \approx 3,8$ км/с.

Задача 2.

На рис. 3 приведена Земля в разрезе. Указан эпицентр землетрясения, в точке B находится наблюдательный пункт, сейсмограф которого зарегистрировал последовательный приход двух сейсмических поверхностных волн с интервалом времени $\tau = 90$ с.

Используя скорости волн из задачи 1: а) оценить расстояние вдоль поверхности Земли между регистратором и эпицентром; б) вычислить угловое расстояние α между эпицентром и точкой В. Радиус Земли равен $R_3 = 6,37$ Мм.

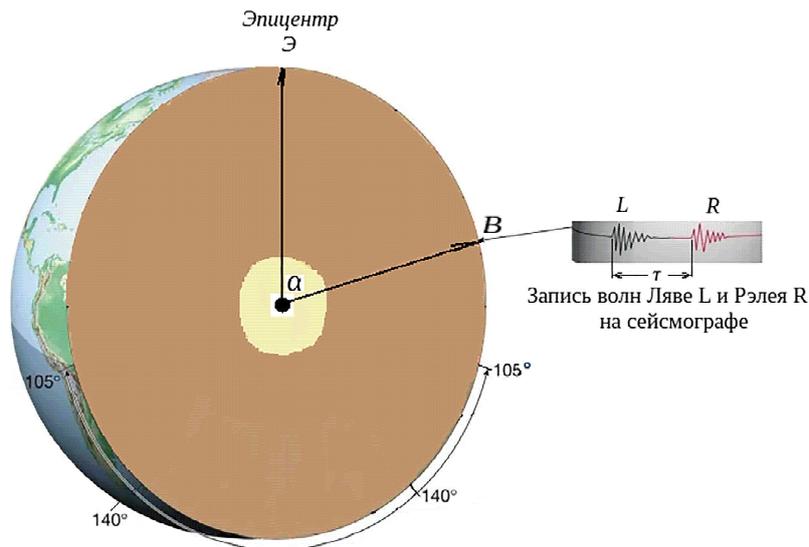


Рисунок 3. К задаче 2.

Решение:

Время, затраченное на пробег каждой из волн от эпицентра до сейсмографа, равно для волны Лява $t_L = \frac{S}{C_L}$ и волны Рэлея $t_R = \frac{S}{C_R}$, где S расстояние вдоль поверхности земли между эпицентром землетрясения и сейсмографом. Интервал времени между приходами волн к сейсмографу равен

$$\tau = \frac{S}{C_R} - \frac{S}{C_L},$$

откуда находим расстояние S :

$$S = \tau \frac{C_R C_L}{C_L - C_R}. \quad (2)$$

Подставляя в (2) числа, находим расстояние

$$S = 90 \frac{3,8 \cdot 4,1}{4,1 - 3,8} \approx 51 \text{ км}. \quad (3)$$

Оценим теперь угловое расстояние между эпицентром и сейсмографом. Учитывая, что $S \ll R_3$, получим $\alpha \approx \frac{S}{R_3} = \frac{51 \text{ км}}{6,37 \cdot 10^3 \text{ км}} \approx 8 \cdot 10^{-3} \text{ рад} \approx 0,45^\circ$.

Ответ: а) $S \approx 51$ км; б) $\alpha \approx 0,45^\circ$.

Обсуждение. Данные сейсмографов широко используются для нахождения эпицентров землетрясений и изучения физики Земли. Полученные нами оценки грубы. Для строгого решения следует учесть неоднородность плотности среды, в которой бежит волна. В неоднородной среде скорость волны меняется по мере распространения. Также не учтены потери при отражении и преломлении волн в многослойной грунтовой поверхности. Реальная задача нахождения эпицентра землетрясения решается с помощью серьезных вычислительных программ, учитывающих направление сейсмических волн, приходящих к сейсмографу, и особенностей структуры грунта на трассе волны.

Примечание. Пока готовилась эта задача произошло крупное (около 9 баллов) землетрясение (30.07.2025 г.) на Камчатке, возникшее при субдукции Тихоокеанской литосферной плиты, подползающей под Охотскую плиту (см. рис. 4 из работы [10]). Рассчитанный сейсмологами эпицентр находился на расстоянии 161 км от Петропавловска на глубине 32 км. Решенная нами задача дает результаты, близкие по порядку величины к параметрам Камчатского землетрясения.

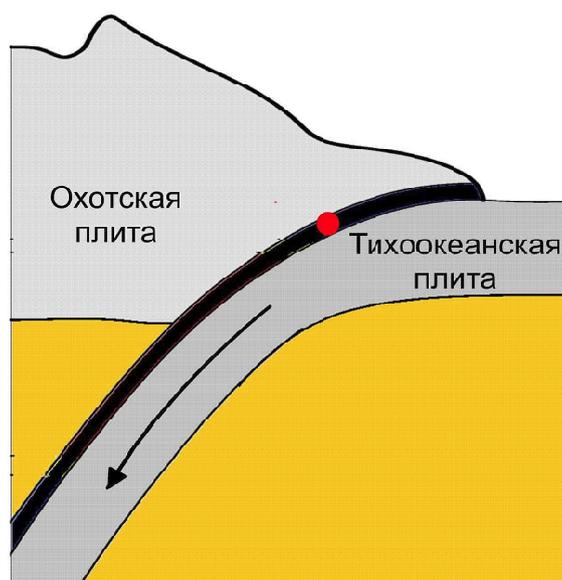


Рисунок 4. Красная точка – эпицентр.
Здесь произошел зацеп плит [10].

3. Звуковые волны

Рассмотрим случай, когда источник звуковых волн движется со скоростью, превышающей скорость звука [11]: $v_u > v$. Пусть в момент времени $t = 0$ источник был в точке S_0 , а в момент t он находится в точке S_t (рис. 5). Расстояние между этими точками равно $v_u t$.

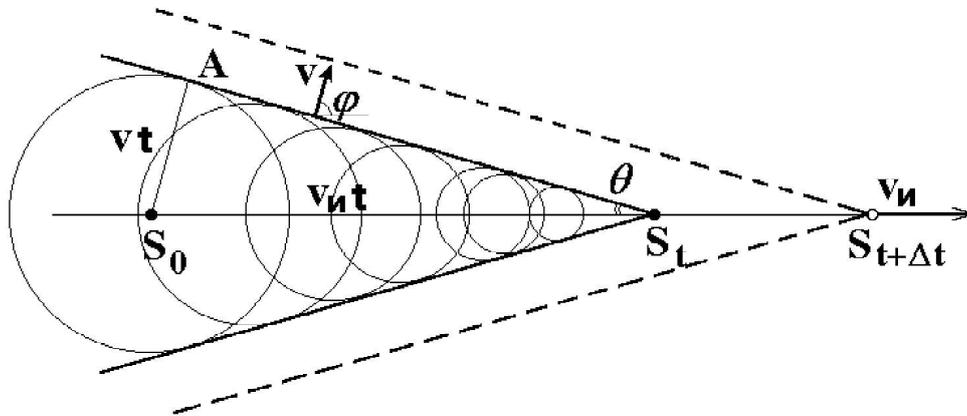


Рисунок 5. Образование конуса Маха при сверхзвуковом движении источника.

В каждой точке своей траектории (для простоты мы рассматриваем прямолинейное равномерное движение) источник испускал сферические звуковые волны. Волна, испущенная в момент $t = 0$ к текущему моменту времени t достигла точки A . Волны, испущенные на пути от S_0 до S_t успели пройти меньшее расстояние. Как видно из рис. 5, в данный момент времени имеется коническая поверхность (ее называют **конусом Маха**), касательная к фронтам всех испущенных сферических волн. Эта коническая поверхность начинается от источника звука, а ее ось совпадает с направлением движения источника. Конус Маха отделяет области пространства, куда дошел звук от источника, от тех областей, куда звук не успел еще дойти. В следующий момент времени $t + \Delta t$ источник переместится в точку $S_{t+\Delta t}$. Соответственно переместится и конус Маха, захватив новые области пространства (показано пунктирной линией).

Синус угла раствора конуса определяется как отношение расстояния vt , пройденного звуковой волной за время t к расстоянию $v_u t$, пройденного источником за то же время:

$$\sin \vartheta = v / v_u. \quad (4)$$

Коническую поверхность можно воспринимать как фронт волны (ее называют **ударной**). Направление распространения волны – это нормаль к фронту. Следовательно, ударная волна распространяется под углом $\varphi = \pi/2 - \theta$ к направлению движения источника. Соответственно, для угла φ можно записать соотношение:

$$\cos \varphi = v / v_u. \quad (5)$$

Отношение v_u / v скорости источника к скорости звука называется **числом Маха**.

Задача 3.

Самолет летит горизонтально на высоте $h = 5000$ м с постоянной скоростью. Наблюдатель заметил его у себя над головой, и засек время. Звук от самолета появился через $t = 11$ с после этого. Найти скорость самолета V . На каком расстоянии по горизонтали находится самолет от наблюдателя в момент, когда последний зарегистрировал приход звука от него?

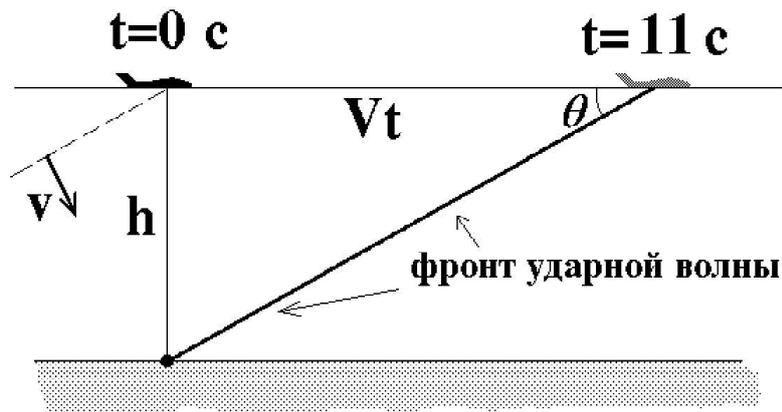


Рисунок 6. Образование конуса Маха при пролете сверхзвукового самолета: штриховая линия – положение конуса Маха в момент пролета самолета над головой наблюдателя, сплошная линия – конус Маха в момент, когда звук дошел до наблюдателя.

Решение:

За время t самолет удалился от наблюдателя на расстояние $S = Vt$. Так как в этот момент звук достиг наблюдателя, то точка наблюдения оказалась на конусе Маха (рис. 6). Имеем соотношения:

$$\sin \vartheta = v/V \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} \theta = h/(Vt). \quad (6)$$

Отсюда получаем связь скорости самолёта с высотой полета и временем t :

$$\frac{v}{V} = \sqrt{1 - \frac{(vt)^2}{h^2}}. \quad (7)$$

Откуда имеем: $V = v / \sqrt{1 - \frac{(vt)^2}{h^2}} = 523$ м/с.

Число Маха равно $V/v = 523/343 = 1,52$. При такой скорости движения самолет удалился по горизонтали на расстояние $S = Vt = 5753$ м. Заметим, кстати, что момент прихода к наблюдателю фронта ударной волны воспринимается как резкий хлопок (подобный грому). Бытующее выражение «самолет преодолел барьер» неверно отражает физический процесс: хлопок, как мы видели, не связан с моментом, когда самолет приобрел сверхзвуковую скорость.

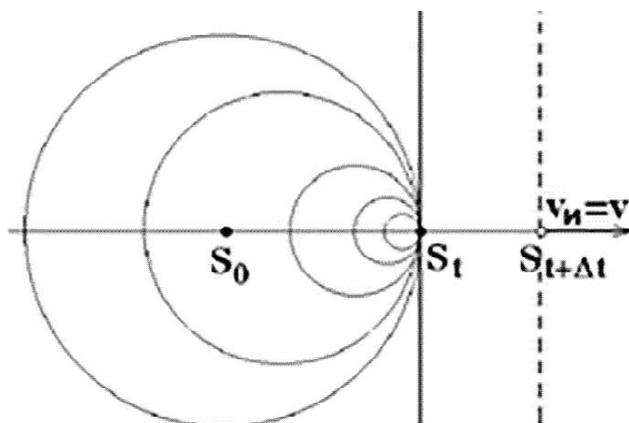


Рисунок 7. Фронт ударной волны в случае движения источника со скоростью звука v . В каждый момент времени t источник находится на поверхности всех сферических волн, испущенных ранее. Огибающая этих сферических волн – фронт ударной волны – представляет собой плоскость, ортогональную направлению движения источника.

Проанализируем формулу (7). Видно, что время задержки не может быть больше, чем $t_{\max} = h/v$. Такая задержка могла бы быть при очень большой скорости самолета ($V \gg v$), когда конус Маха становится крайне узким, почти параллельным направлению движения. Фронту ударной волны, распространяющемуся вертикально вниз, надо при этом пройти расстояние h за время t_{\max} . Время задержки $t = 0$ соответствует случаю, когда скорость самолета равна скорости звука: $V = v$ (рис.7). При этом угол раствора конуса Маха становится равным $\pi/2$ (рис. 5), так что ударная волна доходит до наблюдателя в тот самый момент, когда самолет оказывается у него над головой. При дозвуковых скоростях звук опережает летательный аппарат и приходит к наблюдателю раньше самолета.

4. Заключение

В данной работе изучены проблемы, связанные с решением практических задач на сейсмические и звуковые волны. Используемые математические методы позволили сделать реалистичные оценки наблюдаемых физических величин.

5. Благодарности

Работа выполнена в рамках Программы стратегического академического лидерства «ПРИОРИТЕТ 2030».

Литература

1. *Игнатов В.Н., Калашиников Н.П., Матрончик А.Ю.* Разнообразие математических методов решения физических задач по механике. // Физическое образование в вузах. 2022. – Т. 28, № 1. – С. 7-21.
2. *Игнатов В.Н., Калашиников Н.П., Матрончик А.Ю., Семенова Т.А., Щербачев О.В.* Многообразие математических подходов при решении физических задач по электростатике. // Физическое образование в вузах. – 2022. – Т. 28, № 3. – С. 104-118.
3. *Игнатов В.Н., Калашиников Н.П., Матрончик А.Ю., Семенова Т.А.* Разнообразные математические подходы к решению физических задач по разделу электрический ток. // Физическое образование в вузах. – 2024. – Т. 30, № 2. – С. 43-52.
4. *Игнатов В.Н., Калашиников Н.П., Матрончик А.Ю., Семенова Т.А.* Математические подходы к решению физических задач с магнитным полем. // Физическое образование в вузах. – 2024. – Т. 30, № 3. – С. 117-132.
5. *Игнатов В.Н., Калашиников Н.П., Матрончик А.Ю., Семенова Т.А.* Математические методы решения физических задач с волновыми процессами. // Физическое образование в вузах. – 2025. – Т. 31, № 1. – С. 85-96.
6. *Алешкевич В.А., Деденко Л.Г., Караваев В.А.* Курс общей физики. Механика. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. – 472 с.
7. *Короновский Н.В.* Общая геология. – Книжный дом «Университет», 2016.
8. *Джанколи Д.* Физика. В 2-х т. Т. 1. – М.: Мир, 1989. – 656 с.
9. Сейсмические волны. <https://ru.geologyscience.com/natural-hazards/earthquakes/seismic-waves>.
10. *Остапчук Алексей.* <https://naked-science.ru/article/nakedscience/shestoe-po-sile-chno-sdel>.
11. *Калашиников Н.П., Смондырев М.А.* Основы физики. В 3-х т. Т. 2. – М.: Лаборатория знаний, 2017. – 606 с.

Mathematical Methods for Solving Physical Problems of Wave Propagation in Elastic Media

N.P. Kalashnikov (kalash@mephi.ru),
A.Yu. Matronchik (AYMatronchik@mephi.ru),
T.A. Semenova (contreraskosha@yandex.ru)

*National Nuclear Research University «MEPhI»
115409, Russian Federation, Moscow, Kashirskoe shosse, 31*

Received November 11, 2025

PACS 01.55.+01.40.gb

This paper explores the use of mathematical tools in solving physical problems related to elastic waves. The parameters of seismic waves generated by earthquakes are described. Surface seismic waves – Rayleigh waves and Love waves – are considered. The average frequency and average velocity of these waves are estimated, as well as the distance between the recorder and the earthquake epicenter. The Mach cone, which occurs when a sound source moves at a speed exceeding the speed of sound, is examined.

Keywords: mathematics, physics, elastic wave problems, earthquakes, seismic waves, surface waves, Rayleigh and Love waves, sound waves, supersonic speed, Mach cone, shock wave.

References

1. Ignatov V.N., Kalashnikov N.P., Matronchik A.Yu. Variety of Mathematical Methods for Solving Physical Problems in Mechanics. // *Physics in Higher Education*. – 2022. – Vol. 28, No. 1. – P. 7-21.
2. Ignatov V.N., Kalashnikov N.P., Matronchik A.Yu., Semenova T.A., Shcherbachev O.V. Variety of Mathematical Methods when Solving Physical Problems in Electrostatics. // *Physics in Higher Education*. – 2022. – Vol. 28, No. 3. – P. 104-118.
3. Ignatov V.N., Kalashnikov N.P., Matronchik A.Yu., Semenova T.A., Shcherbachev O.V. Diverse mathematical approaches to solving physical problems with electric current. // *Physics in Higher Education*. – 2024. – Vol. 30, No. 2. – P. 43-52.
4. Ignatov V.N., Kalashnikov N.P., Matronchik A.Yu., Semenova T.A. Mathematical approaches to solving physical problems with magnetic field. // *Physics in Higher Education*. – 2024. – Vol. 30, No. 3. – P. 117-132.

5. Ignatov V.N., Kalashnikov N.P., Matronchik A.Yu., Semenova T.A. Mathematical methods for solving physical problems with wave processes. // Physics in Higher Education. – 2025. – Vol. 31, No. 1. – P. 85-96.
6. Aleshkevich V.A., Dedenko I.G., Karavaev V.A. General Physics Course. Mechanics. – М.: FIZMATLIT, 2011. – 472 p.
7. Koronovsky N.V. General Geology. – Book House «University», 2016.
8. Giancoli D.C. General Physics. – Prentice-Hall, Inc., 1984.
9. Seismic waves. <https://ru.geologyscience.com/natural-hazards/earthquakes/seismic-waves>.
10. Ostapchuk Alexey. <https://naked-science.ru/article/nakedscience/shestoe-po-sile-chto-sdel>.
11. Kalashnikov N.P., Smondyrev M.A. Fundamentals of Physics. In 3 volumes. Volume 2. – М.: Laboratory of knowledge, 2017. – 606 p.